

المحاضرة الثانية عشر

مراجعة:

ليكن $f: X \rightarrow Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ من الفضاء X الى فضاء الجدا Y

تكون التطبيق f متراً اذا وفقط اذا كانت جميع التطبيقات

$\{P_\alpha \circ f\}_{\alpha \in I}$ مترة:

$P_\alpha \circ f$

البراهات:

* لزوم الشرط:

نفرض ان f تطبيق متراً فان جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}$ مترة لذنا تركيب تطبيقين مترين هو تطبيق متراً مع العلم ان P_α متراً

* كفاية الشرط:

نفرض ان جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}$ مترة ولنا $G \in Y_\alpha$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجدا Y_α عندئذ $(P_\alpha \circ f)^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X وتكون

$$(P_\alpha \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(P_\alpha^{-1}(G))$$

وتكون $P_\alpha^{-1}(G)$ هي من عناصر قاعدة الجدا. وهكذا فان f الصورة العكسية وفقط f لذي مجموعة من عناصر قاعدة الجدا هي مجموعة مفتوحة في X وهذا يعني ان تكون f متراً \Leftarrow متراً

مثال (1)

ليكن لدينا التطبيق الذي:
 $R \rightarrow R^2$
 $t \rightarrow (x(t), y(t))$

مثلاً معادلة الدائرة تاروي
 $x = r \cos t$ $y = r \sin t$

مثال (2)

ليكن لدينا
 $R \rightarrow R^3$ تطبيق
 $[a, b] \rightarrow R^3$

مثلاً معادلة اللولب

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

$$z = ct$$

لفاف اللولب

مثال (3)

ليكن لدينا
 $R^2 \rightarrow R^3$ تطبيق

$$x = r \cos u \cos v$$

$$y = r \sin u \cos v$$

$$z = r \sin v$$

مثلاً معادلة الكرة في الفضاء الثلاثي

المعادلة المتجهية تكتبها بشكل

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

وسمى إذا وفقط إذا كانت كل مركبة من إحداثياتها مسمة

ملاحظة: لنفرض a نقطة ثابتة من X فالمجموعة $a_1 \times X_2$ تشكل فضاء جزئياً من فضاء الجداء وهذا الفضاء الجزئي هو متماثل تماماً للفضاء X_2 أي $a_1 \times X_2 \sim X_2$

$$a_1 \times X_2 = \{(a_1, x_2) : x_2 \in X_2\}$$

وبالمثل

$$X_1 \times a_2 \sim X_1$$

وهذا الفضاء الذي يمكن تسميته بالفضاء الجداء بشكل عام

$$X'_S = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = X \text{ فضاء الجداء } X \text{ يحوي فضاء جزئياً } X'_S$$

حيث يكون هومورفيماً للفضاء الاحداثي X'_S

$$X'_S \sim X_S$$

$$a = (a_\alpha) \in X$$

$$X'_S = \{x \in X : x_\alpha = a_\alpha ; \forall \alpha \in I \setminus S\}$$

ملاحظة:

إذا كانت

مجموعات

مجموعة

$$A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

فإنه لصورة A تساوي جميع اللصاقات أي

$$\bar{A} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$$

الفصل الثاني

موضوعات العدد والفصل في الفضاءات الطوبولوجية

لاحظنا العمومية والتجريد في تعريف المفاهيم الطوبولوجية وللمنه
العمومية أهمية في عرض المفاهيم وتبسيط البراهين ولكن
حتى تأخذ نظرية المجموعات المنطقية محتواها الهندسي كان لابد
من وضع شروط إضافية على الفضاءات الطوبولوجية
هذه الشروط تنقسم إلى نوعين:

النوع الأول:

هو طابع محلي له علاقة بعدد المجموعات المقترحة والجوارات

النوع الثاني:

هو طابع كلي له علاقة بإمكانية فصل النقاط والمجموعات عن
بعضها

موضوعات العدد

هناك موضوعات للعدد

① موضوعة العدد:

كل نقطة من نقاط فضاء طوبولوجي تمتلك جملته السليمة من
الجوارات قابلة للعد

بعض المؤلفين يترقبون بالكل

كل نقطة من نقاط فضاء ملك جملته السليمة
من الجوارات قابلة للعد على الأقل كثر

المجموعة قابلة للعد هي
مجموعة منتهية أو كير منتهية
ولكن قابلة للعد تكافئ مجموعة الأعداد
الطبيعية

مثال (1)

لنا فضاء الطوبولوجي المقطع أي أن τ قوية
ولفرضنا أن X غير منتهية وغير قابلة للعد

إن هذا الفضاء معدود أول مما كانت X لأن أي نقطة ما تقاطع
تلك جملة حوارات اسكية هي $\{x\}$ الاسرة المكونة من مجموعة
وحيدة وهي المجموعة وحيدة النهر X بالتالي هي منتهية أي قابلة
للعدي لو كانت X غير منتهية.

مثال (2)

لنا فضاء $X = R$ فضاء طوبولوجي وكانت
 $\tau = \{ \emptyset \} \cup \{ \{u\} : u \in R \}$

هو أيضا معدود أول لأن كل نقطة ما تقاطع تلك جملة حوارات
اسكية هي $\{u\}$ وبالتالي أي حوار L لابد أن يحوي
الواحد X

مثال (3)

الفضاء المترى هو فضاء معدود أول.

لأن أي نقطة ما تقاطع تلك جملة حوارات اسكية قابلة للعد وهي
اسرة الكرات المفتوحة من الشكل

$$\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$$

حيث n تسج مجموعة الأعداد الطبيعية وفي قابلة للعد.

5

1 1

مثال (4)

فضاء المتجهات المنتهية (X, τ) حيث X مجموعة غير قابلة للعد (أي مثل \mathbb{R} مثلاً) ليس محدود أول.

الفضاء ليس محدود أول لذا الفضاء لا يحقق ملاحظة
العد الأولي حيث R غير قابل للعد

البرهان:

نقرض أولاً أنه يحقق الملاحظة الأولى أي أنه لو أخذنا النقطة $x \in R$ فإننا نملك جلة جوارات أساسية قابلة للعد أي أن $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ هذه الجوارات جميعها مفتوحة وتحتوي x وهي متباينة هذه المجموعات مفتوحة

وبالتالي فإن المجموعة (X/U_1) منتهية نسبياً (A_1)

والمجموعة (X/U_2) منتهية نسبياً (A_2)

والمجموعة (X/U_n) منتهية نسبياً (A_n) وهكذا وفقاً لالانهاية

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{فإن } A$$

هي قابلة للعد لأنها اتحاد لمجموعات منتهية وهي مجموعة جزئية من X

المجموعة X/A هي غير خالية وغير قابلة للعد عندئذ يوجد
منها نقطة مثلاً y مختلفة عن x فإن المجموعة
مفتوحة وتحتوي x إذاً هي جوار لـ x (X/U_1)

يتميز هذا الجوار أنه لا يحوي أي من الجوارات u_{n+1} و u_{n+2} و u_{n+3}
وبالتالي هذا تناقض بالتالي النقطة x لا تنتمي لجملة A كلية
قابلة للمعد

② موضوع العدد الثنائي

وهي أن يمتلك الفضاء الطوبولوجي قاعدة قابلة للمعد.
إن الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعية سنطلق عليه مصدود ثنائي

ينتج من هذين التعريفين أن الموضوعية العدد الأولى تنتج من الثانية
أي أن كل مصدود ثنائي هو مصدود أول.

البرهان

مرت معنا سابقاً مبرهنة نقول أن

$$B \text{ قاعدة للفضاء } X \iff \{ \alpha \in B \mid x \in \alpha \} = \{ \alpha \in B \mid x \in \alpha \}$$

جملة اسلية لجوارات x من أجل أي $x \in X$

إذا كانت B قابلة للمعد فإن أي جزء من أجزائها قابل للمعد
وعنه فإن γ قابل للمعد.

وبالتالي فإن أي جملة اسلية لجوارات النقطة x قابلة
للمعد

مثال (1)

الفضاء R مصدود أول وهو مصدود ثنائي أيضاً.

لأنه يملك قاعدة قابلة للمعد وهي أسرة الجملات المفتوحة التي
أحدها أعداد عادية مثل $\{a, b\}$ حيث أن $a, b \in \mathbb{Q}$

مثال (2)

لواخذنا الفضاء الهيلبرتي المنقطع وكانت X غير قابلة للعد
هذا الفضاء محدود أول لكنه ليس محدود ثان ~~لأنه~~ لأنه
أصغر قاعدة له $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ أسرة المجموعات الوحدية الفصحى
غير قابلة للعد لأنه X غير قابلة للعد

مثال (3)

الفضاء \mathbb{R}^2 محدود ثان

لأنه يمتلك قاعدة قابلة للعد وهي أسرة المتطيلات المفتوحة
